

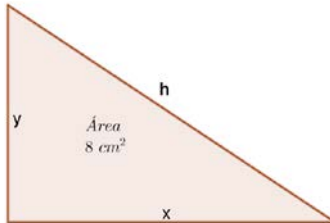
Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 6 Septiembre 2014

[2'5 puntos] De entre todos los triángulos rectángulos de área 8 cm^2 , determina las dimensiones del que tiene la hipotenusa de menor longitud.

Solución

De entre todos los triángulos rectángulos de área 8 cm^2 , determina las dimensiones del que tiene la hipotenusa de menor longitud.



Función a minimizar: Hipotenusa = $h = \text{área rectángulo} + \text{área base} = (2\pi r) \cdot h + \pi r^2$.

Relación entre las variables: Área rectángulo = $8 = (1/2) \cdot \text{cateto} \cdot \text{cateto} = (1/2) \cdot xy$.

Por otro lado por el teorema de Pitágoras, $h^2 = x^2 + y^2$. Como "h" es una longitud $h = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\text{De } 8 = (1/2) \cdot xy, \text{ tenemos } y = 16/x, \text{ luego } h(x) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^4 + 256}{x^2}}$$

$$\text{Función a minimizar } h(x) = \sqrt{\frac{x^4 + 256}{x^2}}$$

Si $h'(a) = 0$ y $h''(a) > 0$, $x = a$ es un mínimo de $h(x)$.

$$h'(x) = \frac{(4x^3)(x^2) - (x^4 + 256)(2x)}{2\sqrt{\frac{x^4 + 256}{x^2}}} = \frac{(2x)(2x^4 - (x^4 + 256))}{2x^4\sqrt{x^4 + 256}} = \frac{(2x^2)(x^4 - 256)}{2x^4\sqrt{x^4 + 256}} = \frac{x^4 - 256}{x^2\sqrt{x^4 + 256}}$$

De $h'(x) = 0$ tenemos $x^4 - 256 = 0$, luego $x = \pm\sqrt[4]{256} = \pm 4$ Como es una longitud, $x = 4 \text{ cm}$.

tenemos $2\pi r^3 = 250$, y $r = \sqrt[3]{\frac{250}{2\pi}} = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ m} \approx 3'414 \text{ m}$.

Veamos que es un mínimo es decir $h''(4) > 0$.

$$h'(x) = \frac{x^4 - 256}{x^2\sqrt{x^4 + 256}}; \quad h''(x) = \frac{4x^3 \cdot x^2\sqrt{x^4 + 256} - (x^4 - 256) \cdot \left(2x\sqrt{x^4 + 256} + x^2 \cdot \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + 256}}\right)}{\left(x^2\sqrt{x^4 + 256}\right)^2}$$

Como $h''(4) = \frac{4(4)^3 \cdot (4)^2\sqrt{(4)^4 + 256} - 0}{\text{numero positivo}} = \text{número positivo} > 0$, $x = 4$ es un mínimo

La longitud de la hipotenusa pedida es $h(4) = \sqrt{\frac{4^4 + 256}{4^2}} = \sqrt{32} \text{ cm} \approx 5'66 \text{ cm}$.

Las dimensiones del rectángulo pedido son $x = 4 \text{ cm}$, $y = 4 \text{ cm}$, por tanto el triángulo rectángulo es isósceles (dos lados iguales), y la hipotenusa es $h(4) = \sqrt{32} \text{ cm} \approx 5'66 \text{ cm}$.

Ejercicio 2 opción A, modelo 6 Septiembre 2014

[2'5 puntos] Calcula $\int \frac{dx}{2x(x + \sqrt{x})}$. (Sugerencia: cambio de variable $t = \sqrt{x}$)

Solución

$$\text{Calcula } I = \int \frac{dx}{2x(x + \sqrt{x})} = \{ t = \sqrt{x} \rightarrow t^2 = x \rightarrow 2t dt = dx \} = \int \frac{2t dt}{2t^2(t^2 + t)} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t^2(t+1)} =$$

$$= \{ \text{integral racional} \} = \int \frac{A dt}{t} + \int \frac{B dt}{t^2} + \int \frac{C dt}{t+1} = A \cdot \ln|t| - B/t + C \cdot \ln|t+1| + K.$$

Calculamos A, B y C.

$$\frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1} = \frac{At(t+1) + B(t+1) + Ct^2}{t^2(t+1)}, \text{ igualando numeradores tenemos:}$$

$$1 = At(t+1) + B(t+1) + Ct^2.$$

$$\text{De } t = 0 \rightarrow 1 = B.$$

$$\text{De } t = -1 \rightarrow 1 = C(-1)^2 = C$$

$$\text{Tomando } t = 1 \rightarrow 1 = A(2) + 1(2) + 1(1)^2 \rightarrow 1 = 2A + 3 \rightarrow A = -1.$$

$$\text{Luego } I = A \cdot \ln|t| - B/t + C \cdot \ln|t+1| + K = -1 \ln|t| - 1/t + \ln|t+1| + K = \{ \text{quitando cambio} \} =$$

$$= -1 \ln|\sqrt{x}| - 1/\sqrt{x} + \ln|\sqrt{x} + 1| + K, \text{ es decir la integral pedida es:}$$

$$\int \frac{dx}{2x(x + \sqrt{x})} = -\ln|\sqrt{x}| - 1/\sqrt{x} + \ln|\sqrt{x} + 1| + K.$$

Ejercicio 3 opción A, modelo 6 Septiembre 2014

Se sabe que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ es 3, haya los siguientes

determinantes, indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

(a) [1 punto] $\det(A^3)$, $\det(A^{-1})$ y $\det(A + A^t)$. (A^t indica la traspuesta de A).

(b) [0'75 puntos] $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{pmatrix}$. (c) [0'75 puntos] $\det \begin{pmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{pmatrix}$.

Solución

Se sabe que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ es 3, haya los siguientes

determinantes, indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

(a) $\det(A^3)$, $\det(A^{-1})$ y $\det(A + A^t)$. (A^t indica la traspuesta de A).

La matriz A que me han dado es simétrica y coincide con su traspuesta, luego $A = A^t$.

(i) Sabemos que $\det(2 \cdot A_n) = (2)^n \cdot \det(A_n)$, $\det(A^t) = \det(A)$, $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ y que $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$, porque de $A^{-1} \cdot A = I$, aplicándole determinantes $|A^{-1} \cdot A| = |I| = 1 = |A^{-1}| \cdot |A|$, luego $|A^{-1}| = 1/|A|$.

$$\text{Luego } \det(A^3) = \det(A) \cdot \det(A) \cdot \det(A) = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27.$$

$$\det(A^{-1}) = 1/\det(A) = 1/3.$$

$$\det(A + A^t) = \det(A + A) = \det(2A) = (2)^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = 24.$$

(b)

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{pmatrix}.$$

(ii) Si una fila (columna) de un determinante esta multiplicada por un número, dicho número sale fuera multiplicando a todo el determinante.

(iii) Si intercambiamos entre si dos filas (columnas) de un determinante el determinante cambia de signo.

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{pmatrix} = \{\text{aplicamos (ii)}\} = (2) \cdot \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ b & d & e \end{pmatrix} = \{\text{aplicamos (iii)}\} =$$

$$= (2)(-1) \cdot \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = (2)(-1)(3) = -6.$$

(c)

$$\det \begin{pmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{pmatrix}.$$

(iv) Si una fila (columna) un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes colocando en dicha fila (columna) el premier y segundo sumando respectivamente.

(v) Si un determinante tiene dos filas iguales o proporcionales, dicho determinante vale 0.

$$\det \begin{pmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{pmatrix} = \{\text{aplicamos (iv)}\} = \det \begin{pmatrix} a & b & 4a \\ b & d & 4b \\ c & e & 4c \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a & b & -c \\ b & d & -e \\ c & e & -f \end{pmatrix} = \{\text{aplicamos (ii), (iii) y}$$

$$(v)\} = 0 + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = (-1) \cdot (3) = -3.$$

Ejercicio 4 opción A, modelo 6 Septiembre 2014

Sea r la recta definida por $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y "s" la recta dada por $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

a) [1'75 puntos] Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.

b) [0'75 puntos] Calcula la distancia entre r y s

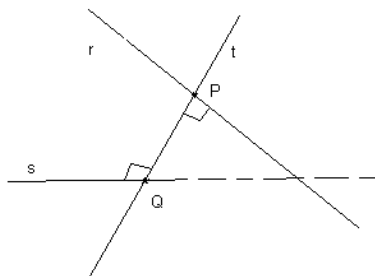
Solución

Sea r la recta definida por $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y "s" la recta dada por $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$.

a)

Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.

Forma (1) de hacerlo



Ponemos ambas recta en paramétricas o en forma vectorial con un parámetro distinto

De la recta "r" punto A(1,1,0) y vector director $\mathbf{u} = (1,1,1)$

De la recta "s" punto B(1,0,1) y vector director $\mathbf{v} = (-2,1,-2)$

$$r \equiv (x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(1,1,1) = (1+\lambda, 1+\lambda, \lambda)$$

$$s \equiv (x,y,z) = (1,0,1) + \mu(-2,1,-2) = (1-2\mu, \mu, 1-2\mu)$$

De la recta $r(A;\mathbf{u})$ tomamos un punto genérico $X(x,y,z) = X(1+\lambda, 1+\lambda, \lambda)$

De la recta $s(B;\mathbf{v})$ tomamos un punto genérico $Y(x,y,z) = Y(1-2\mu, \mu, 1-2\mu)$

El vector \mathbf{XY} tiene que ser perpendicular al vector director de "r" \mathbf{u} y al vector director de "s" \mathbf{v} a la vez, es decir su producto escalar (\bullet) tiene que ser cero:

$$\mathbf{XY} = (1-2\mu-1-\lambda, \mu-1-\lambda, 1-2\mu-\lambda) = (-2\mu-\lambda, -1+\mu-\lambda, 1-2\mu-\lambda)$$

$$\mathbf{XY} \bullet \mathbf{u} = 0$$

$$(-2\mu-\lambda, -1+\mu-\lambda, 1-2\mu-\lambda) \bullet (1,1,1) = 0 = -2\mu-\lambda -1+\mu-\lambda +1-2\mu-\lambda = -3\mu-3\lambda = 0 \rightarrow \mu = -\lambda$$

$$\mathbf{XY} \bullet \mathbf{v} = 0$$

$$(-2\mu-\lambda, -1+\mu-\lambda, 1-2\mu-\lambda) \bullet (-2,1,-2) = 0 = -2(-2\mu-\lambda) -1+\mu-\lambda -2(1-2\mu-\lambda) = 4\mu+2\lambda-1+\mu-\lambda-2+4\mu+2\lambda = -3+9\mu+3\lambda = 0 = -1+3\mu+\lambda = 0$$

Resolvemos el sistema

$$\mu = -\lambda$$

$$-1+3\mu+\lambda = 0 \rightarrow -1-3\lambda+\lambda = 0 \rightarrow -1-2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -1/2 \rightarrow \mu = 1/2.$$

Entrando en el punto genérico X con el valor de $\lambda = -1/2$, obtenemos el punto P que es $P(1+(-1/2), 1+(-1/2), (-1/2)) = P(1/2, 1/2, -1/2)$

Entrando en el punto genérico Y con el valor de $\mu = 1/2$, obtenemos el punto Q que es $Q(1-2(1/2), (1/2), 1-2(1/2)) = Q(0, 1/2, 0)$

La recta pedida "t" es la que pasa por los punto P y Q, es decir $t(Q;\mathbf{QP})$

$$Q(0, 1/2, 0)$$

$$\mathbf{QP} = (1/2-0, 1/2-1/2, -1/2-0) = (1/2, 0, -1/2)$$

La recta pedida es $t \equiv (x,y,z) = (0, 1/2, 0) + \delta(1/2, 0, -1/2)$ con $\delta \in \mathbb{R}$.

b)

Calcula la distancia entre r y s

$$\text{La distancia entre las rectas "r" y "s" es } d(r;s) = \|\mathbf{QP}\| = \sqrt{((1/2)^2+(0)^2+(1/2)^2)} = \sqrt{(1/2)} \text{ u}^1$$

a)

Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r y a s.

Forma (2) de hacerlo

$$r \equiv (x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(1,1,1); \quad s \equiv (x,y,z) = (1,0,1) + \mu(-2,1,-2)$$

La recta "t" la vamos a dar como intersección de dos planos π_1 y π_2

El vector \mathbf{uxv} es un vector perpendicular a la vez a las recta "r" y "s", luego tiene la dirección de la recta pedida.

$$\mathbf{uxv} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2-1) - \vec{j}(-2+2) + \vec{k}(1+2) = (-3,0,3)$$

Plano $\pi_1 \equiv \det(A;\mathbf{u}; \mathbf{uxv}) = 0$, es decir plano que contiene a la recta "r" y al vector \mathbf{uxv} , es decir:

$$\pi_1 \equiv \det(A;\mathbf{u}; \mathbf{uxv}) = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (x-1)(3-0) - (y-1)(3+3) + (z)(0+3) = 3x - 6y + 3z + 3 =$$

$$= x - 2y + z + 1 = 0$$

Plano $\pi_2 \equiv \det(B;\mathbf{v}; \mathbf{uxv}) = 0$, es decir plano que contiene a la recta "s" y al vector \mathbf{uxv} , es decir:

$$\pi_2 \equiv \det(\mathbf{B}; \mathbf{v}; \mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (x-1)(3-0) - (y)(-6-6) + (z-1)(0+3) = 3x + 12y + 3z - 6 =$$

$$= x + 4y + z - 2 = 0$$

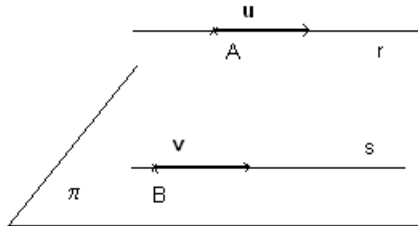
La recta "t" pedida es $t \equiv \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ x + 4y + z - 2 = 0 \end{cases}$

b)

Calcula la distancia entre r y s

$$r \equiv (x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(1,1,1); \quad s \equiv (x,y,z) = (1,0,1) + \mu(-2,1,-2)$$

Distancia de un punto de una recta a un plano que contiene a la otra y es paralelo a la primera



De "r" tenemos A(1,1,0) y $\mathbf{u} = (1,1,1)$

De "s" tenemos B(1,0,1) y $\mathbf{v} = (-2,1,-2)$

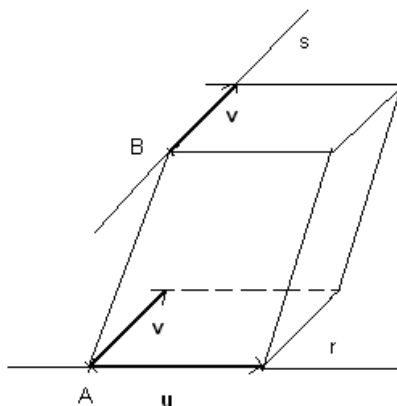
El plano π que contiene a la recta "s" y es paralelo a la recta "r" tiene de ecuación:

$$\det(\mathbf{B}\mathbf{X}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 = (x-1)(1+2) - (y)(-2+2) + (z-1)(-2-1) = 3x - 3z = 0 = x - z = 0$$

$$d(r;s) = d(A; \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|(1) - (0)|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} u^1$$

También podríamos calcular la distancia entre las rectas "r" y "s" por producto mixto.



Formamos el paralelepípedo determinado por los vectores \mathbf{AB} , \mathbf{u} y \mathbf{v}

Volumen paralelepípedo = $|\{\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}|$ = área base por altura = $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \cdot d(r;s)$, de donde

$$d(r;s) = (|\{\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}|) / (\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|)$$

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 6 Septiembre 2014

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función derivable definida por $f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{b}{x} + \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$, donde \ln denota

el logaritmo neperiano.

a) [1'25 puntos] Calcula a y b .

b) [1'25 puntos] Para $a = 3$ y $b = 2$ calcula los extremos absolutos de f en el intervalo $[0, e]$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función derivable definida por $f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{b}{x} + \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$, donde \ln denota

el logaritmo neperiano.

a)

Calcula a y b .

Como $f(x)$ es derivable en su dominio, por tanto también es continua en su dominio; en particular es continua y derivable en $x = 1$.

Como es continua en $x = 1$, $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a - x) = a - 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{b}{x} + \ln(x) \right) = \frac{b}{1} + \ln(1) = b;$$

Igualando $b = a - 1$.

$$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{b}{x} + \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{b}{x^2} + \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Como es derivable en $x = 1$, tenemos $f'(1^-) = f'(1^+)$. Vamos a ver la continuidad de la derivada.

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-1) = -1; \quad f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{b}{x^2} + \frac{1}{x} \right) = -b + 1.$$

Igualando tenemos $-1 = -b + 1 \rightarrow b = 2$ y $a = 2 + 1 = 3$.

b)

Para $a = 3$ y $b = 2$ calcula los extremos absolutos de f en el intervalo $[0, e]$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} + \ln(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Como la función es derivable los extremos absolutos se encuentran en $x = 0$, $x = e$ (extremos del intervalo $[0, e]$) y en los puntos que anula $f'(x)$.

Si $x < 1 \rightarrow f'(x) = -1 = 0$. Esto es absurdo.

Si $x > 1 \rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \frac{2}{x^2} = \frac{1}{x} \rightarrow 2x = x^2 \rightarrow 2x - x^2 = 0 = x(2 - x) = 0$, de donde tenemos $x = 0$ (ya lo teníamos) y $x = 2$.

Si $x < 1 \rightarrow f(x) = 3 - x \rightarrow f(0) = 3 - 0 = 3$.

Si $x > 1 \rightarrow f(x) = \frac{2}{x} + \ln(x) \rightarrow f(2) = \frac{2}{2} + \ln(2) \cong 1'69 \rightarrow f(e) = \frac{2}{e} + \ln(e) \cong 1'73$.

Por tanto el máximo absoluto se alcanza en $x = 0$ y vale $f(0) = 3$, y el mínimo absoluto se alcanza en $x = 2$ y vale $f(2) = 1 + \ln(2) \cong 1'69$.

Ejercicio 2 opción B, modelo 6 Septiembre 2014

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x \cdot \cos(x)$.

a) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

b) [1'5 puntos] Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 0)$.

Solución

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x \cdot \cos(x)$.

a)

Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

La recta tangente en $x = 0$ es " $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ "

$f(x) = e^x \cdot \cos(x)$; $f'(x) = e^x \cdot \cos(x) - e^x \cdot \sin(x)$.

Por tanto $f(0) = e^0 \cdot \cos(0) = 1 \cdot 1 = 1$ y $f'(0) = e^0 \cdot \cos(0) - e^0 \cdot \sin(0) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1$.

La recta tangente pedida es " $y - 1 = 1(x - 0)$ " $\rightarrow y = x + 1$.

b)

Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 0)$.

Una primitiva es $F(x) = I = \int e^x \cdot \cos(x) dx = \{ \text{Integral por partes por partes } \int u dv = uv - \int v dz. \text{ En nuestro caso } u = e^x \text{ y } dv = \cos(x) dx, \text{ de donde, } du = e^x dx \text{ y } v = \int dv = \sin(x) \} = e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \sin(x) dx = e^x \cdot \sin(x) - I_1.$

$I_1 = \int e^x \cdot \sin(x) dx = \{ \text{Integral por partes por partes. En nuestro caso } u = e^x \text{ y } dv = \sin(x) dx, \text{ de donde, } du = e^x dx \text{ y } v = \int dv = -\cos(x) \} = -e^x \cdot \cos(x) + \int e^x \cdot \cos(x) dx = -e^x \cdot \cos(x) + I.$

Tenemos $I = e^x \cdot \sin(x) - I_1 = e^x \cdot \sin(x) - (-e^x \cdot \cos(x) + I) = e^x \cdot \sin(x) + e^x \cdot \cos(x) - I$, de donde:

$2I = e^x \cdot \sin(x) + e^x \cdot \cos(x) \rightarrow I = (e^x \cdot \sin(x) + e^x \cdot \cos(x))/2 + K.$

Una primitiva es $F(x) = (e^x \cdot \sin(x) + e^x \cdot \cos(x))/2 + K$, como dicen que pasa por $(0, 0)$, tenemos:

$F(0) = 0 = (e^0 \cdot \sin(0) + e^0 \cdot \cos(0))/2 + K = 1/2 + K$, de donde **$K = -1/2$ y la primitiva pedida**

es: $F(x) = (e^x \cdot \sin(x) + e^x \cdot \cos(x))/2 - 1/2$.

Ejercicio 3 opción B, modelo 6 Septiembre 2014

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$mx - 2y + z = 1$$

$$x - 2my + z = -2$$

$$x - 2y + mz = 1$$

a) [1'75 puntos] Discute el sistema según los valores del parámetro m .

b) [0'75 puntos] Si es posible, resuelve el sistema para $m = -2$.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$mx - 2y + z = 1$$

$$x - 2my + z = -2$$

$$x - 2y + mz = 1$$

a)

Discute el sistema según los valores del parámetro m .

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 1 \\ 1 & -2m & 1 \\ 1 & -2 & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} m & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2m & 1 & -2 \\ 1 & -2 & m & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudiamos los rangos de A y A^* para discutir el sistema. Si $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = 3$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ 1 & -2m & 1 \\ 1 & -2 & m \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ 1 & -2m & 1 \\ 1-m & 0 & m-1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} = \\ \text{fila} \end{array}$$

$$= (1-m)(-2+2m) + 0 + (m-1) \cdot (-2m^2+2) = (m-1)(2-2m) + (m-1) \cdot (-2m^2+2) =$$

$$= (m-1) \cdot (2-2m-2m^2+2) = (m-1) \cdot (-2m^2-2m+4).$$

Resolviendo la ecuación $|A| = 0 = (m-1) \cdot (-2m^2-2m+4) = 0$, tenemos $m = 1$ y $-2m^2-2m+4=0$,

de donde $m^2 + m - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$, de donde $m = 1$ y $m = -2$.

Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$, $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si $m = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En A como la 2ª y 3ª filas son iguales entre si e igual a la primera, sólo tenemos una fila independiente, pues las demás dependen de ella, por tanto $\text{rango}(A) = 1$.

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$.

Como $\text{rango}(A) = 1 \neq \text{rango}(A^*) = 2$. **El sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si $m = -2$ (Apartado (b))

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 2 = -6 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A) = 2$.

En A^* como $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 + 2F_1} \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} = 1(0-0) = 0, \\ \text{columna} \end{array}$ $\text{rango}(A^*) = 2$.

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$. **El sistema es compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2 con dos ecuaciones es suficiente, tomamos la 1ª y 1ª ecuación, pues con ellas he formado el menor de la matriz A distinto de cero, y al ser rango 2, hay dos ecuaciones y dos incógnitas principales.

$$-2x - 2y = 1 - z \quad \rightarrow \quad -2x - 2y = 1 - z$$

$$x + 4y = -2 - z \quad E_2 - E_1 \quad \rightarrow \quad 3x + 6y = -3 \quad \rightarrow \quad 6y = -3 - 3x \quad \rightarrow \quad y = -1/2 - x/2.$$

Entrando en la 1ª ecuación $-2x - 2(-1/2 - x/2) = 1 - z \rightarrow -2x + 1 + x = 1 - z \rightarrow -x = -z$, luego $x = z$, con lo cual $y = -1/2 - x/2 = -1/2 - z/2$

Tomamos $z = b \in \mathbb{R}$, y las soluciones del sistema son $(x, y, z) = (b, -1/2 - b/2, b)$ con $b \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4 opción B, modelo 6 Septiembre 2014

Considera el plano π de ecuación $2x + y - z + 2 = 0$, y la recta r de ecuación $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3}$.

a) [0'5 puntos] Determina la posición relativa de π y r .

b) [1 punto] Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es perpendicular a π .

c) [1 punto] Halla las ecuaciones paramétricas del plano paralelo a π que contiene a r .

Solución

Considera el plano π de ecuación $2x+y-z+2=0$, y la recta r de ecuación $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3}$.

a)

Determina la posición relativa de π y r .

Ponemos la recta "r" en vectorial o paramétrica y entramos con ella en la ecuación del plano. Resolvemos dicha ecuación con una incógnita y lo interpretamos.

De "r" punto el $A(5,0,6)$ y vector director el $\mathbf{u} = (-2,1,-3)$. Ecuación vectorial:

$(x,y,z) = (5,0,6) + \lambda \cdot (-2,1,-3) = (5-2\lambda, \lambda, 6-3\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Sustituimos en " π "

$2(5-2\lambda) + (\lambda) - (6-3\lambda) + 2 = 0 \rightarrow 10 - 4\lambda + \lambda - 6 + 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow 0 \cdot \lambda + 6 = 0 \rightarrow \mathbf{0 = -6}$. **Esto es absurdo, por tanto la recta es paralela al plano y no está contenida en él**

b)

Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es perpendicular a π .

Para un plano π_1 necesitamos un punto y dos vectores independientes. Como contiene a la recta "r" tomamos como punto el de la recta, el $A(5,0,6)$, y uno de los vectores el director de la recta, el $\mathbf{u} = (-2,1,-3)$. Como el plano es perpendicular al plano π el otro vector es el normal del plano π el $\mathbf{n} = (2,1,-1)$.

Ecuación general del plano π_1 , puntos $X(x,y,z)$ tal que $\det(\mathbf{AX}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = 0$.

$$\pi_1 \equiv \det(\mathbf{AX}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = 0 = \begin{vmatrix} x-5 & y & z-6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 = (x-5)(-1+3) - (y)(2+6) + (z-6)(-2-2) =$$

$$= 2x - 8y - 4z + (-10+24) = 0 = \mathbf{2x - 8y - 4z + 14 = 0 = x - 4y - 2z + 7 = 0}.$$

c)

Halla las ecuaciones paramétricas del plano paralelo a π que contiene a r .

La ecuación de un plano π_2 , paralelo al plano π es de la forma $2x+y-z+K=0$, porque tiene el mismo vector normal π . Como me dicen que contiene a "r" y hemos visto en el apartado (a) que "r" y π son paralelos y distintos, le imponemos la condición al plano de que contenga al punto $A(5,0,6) \rightarrow 2(5) + (0) - (6) + K = 0$, de donde $K = -4$.

El plano pedido $\pi_2 \equiv 2x+y-z-4=0$.

Me piden las ecuaciones paramétricas:

Toma $x = \lambda \in \mathbb{R}$, $z = \mu \in \mathbb{R}$ con lo cual $y = 4 - 2\lambda + \mu$. Las ecuaciones paramétricas son:

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 - 2\lambda + \mu, \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \\ z = \mu \end{cases}$$